

Problema IM²C - Chile 2020 - Selección

Midiendo la desigualdad

De acuerdo a muchos analistas, una de las principales causas del estallido social que se inició en Chile en octubre de 2019 tiene relación con los bajos sueldos y la desigualdad de ingresos de la población. Si bien algunas mediciones parecieran indicar que esta ha disminuido en los últimos 30 años, la sensación de la ciudadanía es que, a pesar del aumento de ingresos, el país continúa siendo muy desigual.

Uno de los índices que se usan habitualmente para medir la desigualdad de una sociedad es el coeficiente Gini¹, que corresponde a un valor entre 0 y 1. Una sociedad donde todos los habitantes tienen el mismo ingreso tiene coeficiente de Gini igual a 0. Por el contrario, en una sociedad totalmente desigual en la que una sola persona se lleva todos los ingresos, el coeficiente es igual a 1.

Varios autores han manifestado ciertas inquietudes respecto a que la medición de la desigualdad se base exclusivamente en este índice. Entre otras cosas, se argumenta que países con coeficientes de Gini iguales o muy parecidos, pueden esconder grandes diferencias en la distribución de ingresos.

Para este problema, vamos a considerar dos sociedades ficticias: la República de El Dorado y el Reino de Wakanda. La siguiente tabla muestra el porcentaje de los ingresos totales del país, antes de impuestos, que concentran cada uno de los deciles.

Decil	El Dorado	Wakanda
I	1	4
II	1	4
III	5	5
IV	7	5
V	7	5
VI	8	6
VII	10	6
VIII	10	7
IX	15	12
X	36	46
Total	100	100

Tabla. Porcentaje de ingresos de cada uno de los deciles de los países de El Dorado y Wakanda antes de impuestos.

¹ En el anexo se explica brevemente qué es el coeficiente de Gini y cómo se calcula.

Para efectos de las preguntas de este problema, vamos a suponer que en cada uno de estos países **todas las personas dentro de un mismo decil perciben el mismo ingreso**.

A su equipo se le solicita lo siguiente:

1. Construir la curva de Lorenz² para cada uno de estos países y elaborar un gráfico que permita comparar ambas curvas. Además, calcular el coeficiente de Gini de ambos países a partir del porcentaje de ingresos de los deciles, y verificar que es el mismo.
2. Diseñar un modelo para distribuir el dinero obtenido de un impuesto aplicado al decil más rico de la población que permita reducir al máximo el coeficiente de Gini. Argumenten matemáticamente por qué la forma que proponen para redistribuir este dinero es la que cumple esta condición. Además, ejemplifiquen cómo se comporta su modelo en ambos países.
3. Definir otra medida, distinta al coeficiente de Gini, que permita comparar la desigualdad de distintos países, y usenla para establecer cuál de estos dos países es más desigual. Finalmente, argumenten en cuál de ellos preferirían vivir.

² En el Anexo se explica como construir esta curva.

ANEXO

El coeficiente de Gini se puede calcular a partir de la curva de Lorenz de los ingresos, la que se construye de la siguiente forma:

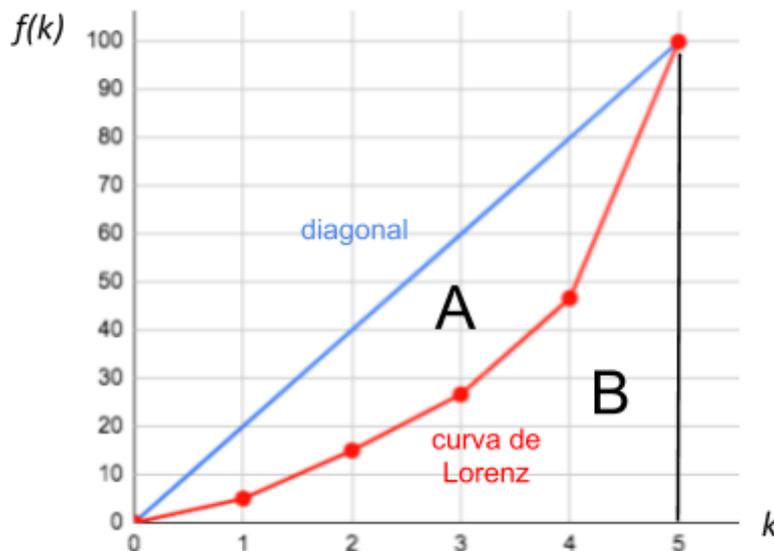
- a) Considera una base de datos de los ingresos de n personas (o grupos) en un país.
- b) Para $0 \leq k \leq n$, el ingreso acumulado $f(k)$ se define como la proporción de los ingresos del país que tienen las k personas (o grupos) de menores ingresos.
- c) La curva de Lorenz está definida por los puntos $(k, f(k))$, para $0 \leq k \leq n$.

Una vez dibujada la curva de Lorenz, el coeficiente de Gini corresponde al cociente

$$G = \frac{A}{A + B}$$

donde A es el área de la región entre la diagonal que une $(0, f(0))$ con $(n, f(n))$ y la curva de Lorenz, y B es el área de la región bajo la curva de Lorenz.

Ejemplo. El gráfico muestra la curva de Lorenz para un conjunto de 5 personas cuyos ingresos anuales son de 3, 5, 7, 13 y 32 millones de pesos, respectivamente. A la derecha se muestra el valor del coeficiente Gini para esta distribución de ingresos.



$$A = 110$$

$$B = 140$$

$$G = \frac{A}{A + B} = 0.44$$